BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** ***2010***

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО НЕЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ КВАЗИОПТИКИ С ЧИСТО МНИМЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ В НЕЛИНЕЙНОЙ ЧАСТИ

Н.С.ИБРАГИМОВ

Министерство Образования Азербайджанской Республики

natiq ibrahimov@mel.ro

В данной работе рассматриваются начально-краевые задачи для многомерного нелинейного стационарного уравнения квазиоптики с чисто мнимым коэффициентом в нелинейной части этого уравнения. Для рассматриваемых начально-краевых задач изучен вопрос корректности их постановки и доказаны теоремы существования и единственности решения этих задач.

В данной работе изучается вопрос разрешимости начально-краевых задач для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики с чисто мнимым коэффициентом в нелинейной части этого уравнения, которые часто возникают в нелинейной оптике при изучении распространения светового пучка в неоднородной среде, когда волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля световой волны не зависит от временной переменной [1]. Начально-краевую задачу для многомерного нелинейного стационарного уравнения квазиоптики можно рассмотреть как начально-краевую задачу для многомерного нелинейного нестационарного уравнения Шредингера с комплекснозначным квантовомеханическим потенциалом. Известно, что начально-краевые задачи для многомерного нелинейного стационарного уравнения Шредингера с вещественнозначным квантовомеханическим потенциалом, зависящим от переменной x, когда нелинейная часть уравнения содержит чисто мнимый коэффициент, подробно изучены в работах $[2-4]$ и др. При этом потенциал является измеримой ограниченной функцией или квадратично суммируемой функцией, зависящей только от переменной x, имеющей обобщенную производную первого порядка. В отличие от ранних работ, в настоящей работе потенциал является комплекснозначной измеримой ограниченной функцией, зависящей от переменных (x,z) и имеющей измеримую ограниченную обобщенную производную первого порядка только по переменной z. Поэтому изучение вопроса разрешимости начально-краевых задач для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики представляет немалый интерес, когда нелинейная часть уравнения содержит чисто мнимый коэффициент.

1. Постановка задачи.

Пусть D- ограниченная областъ двумерного евклидова пространства R^2, Γ-граница области D, которая предполагается достаточно гладкой, например, $\Gamma \subset C^2$ или кусочно-гладкая, $x=(x_1,x_2)-$ произвольная точка области $D, 0\le z\le L, L>0-$ заданное число, $\Omega_z = D\times(0,z), \Omega=\Omega_L, S=\tilde{A}\times(0,L)$- боковая поверхность цилиндра Ω. Пусть $L_p(D)$- лебегово пространство измеримых функций в области D, суммируемых со степенью $p\ge 1$; $C^k([0,L],B)-$ банахово пространство, состоящее из всех определенных и $k\ge 0-$раз непрерывно дифференцируемых на $[0,L]$ функций со значениями в банаховом пространстве B; $W_p^k(D), W_p^{k,m}(\Omega)-$соболевы пространства функций с обобщенными производными порядка $k\ge 0-$по переменной x и $m\ge 0-$по переменной z, соответственно, которые суммируемы со степенью $p\ge 1$, $\overset{0}{W}{}_2^1(D)-$подпространство пространства $W_2^1(D)$, всюду плотным множеством в котором является множество всех гладких функций, равных нулю вблизи границы Γ области D; $\overset{0}{W}{}_2^2(D)\equiv W_2^2(D)\cap \overset{0}{W}{}_2^1(D)$.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики $[1]$ об определении функции $\psi=\psi(x,z)$ из условий:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z}+a_0\Delta\psi-a(x)\psi+v_0(x,z)\psi+iv_1(x,z)\psi+ia_1|\psi|^2\psi=f(x,z),(x,z)\in\Omega, \quad (1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x), x\in D,\ \psi|_S=0, \quad (2)$$

где $i=\sqrt{-1}-$мнимая единица, $\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$- оператор Лапласа, $\psi=\psi(x,z)-$волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля волны, распространяющиеся вдоль оси z, $a_0>0, a_1>0-$заданные числа, $a(x)$, $v_0(x,z)$, $v_1(x,z)-$ заданные вещественнозначные измеримые ограниченные функции, удовлетворяющие условиям:

$$0\le a(x)\le\mu_0, \overset{0}{\forall}x\in D, \mu_0=const>0; \quad (3)$$

$$|v_m(x,z)|\le b_m, \left|\frac{\partial v_m(x.z)}{\partial z}\right|\le d_m, m=0,1, \overset{0}{\forall}(x,z)\in\Omega, \quad (4)$$

где $b_m, d_m, m=0,1-$заданные положительные числа; а функции $\varphi(x)$, $f(x,z)-$ заданные комплекснозначные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^2(D), \quad f\in W_2^{0,1}(\Omega). \quad (5)$$

Ясно, что задача об определении функции $\psi=\psi(x,z)$ из условий (1),(2) является первой начально-краевой задачей для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики. Под решением этой задачи будем понимать функцию $\psi=\psi(x,z)$ из пространства $B_0 \equiv C^0\left([0,L],\overset{0}{W}{}_2^2(D)\right)\cap C^1([0,L],L_2(D))$, удовлетворяющую уравнению (1) для любого $z\in[0,L]$ и почти всех $x\in D$, а условиям (2) для почти всех $x\in D$ и $(\xi,z)\in S$, соответственно.

2. Существование и единственность решения первой начально-краевой задачи

Теперь используя метод Галеркина изучим вопрос разрешимости начально-краевой задачи (1), (2).

Теорема 1. Пусть функции $a(x), v_0(x,z), v_1(x,z), \varphi(x), f(x,z)$ удовлетворяют условиям (3)-(5). Тогда начально-краевая задача (1), (2) имеет единственное решение из пространства B_0 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi(.,z)\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\left\|\frac{\partial\psi(.,z)}{\partial z}\right\|_{L_2(D)}\le c_0\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^3_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}+\left(\widetilde{c}_0\right)^{\frac{3}{2}}\right) \qquad (6)$$

для $\forall z\in[0,L]$, где $c_0>0-$некоторая постоянная, а $\widetilde{c}_0$ определяется формулой:

$$\widetilde{c}_0=\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}.$$

Доказательство. Для доказательства будем использовать метод Галеркина. Возьмем какую-либо фундаментальную в $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ и ортонормированную в $L_2(D)$ систему функций $u_k=u_k(x), k=1,2,...$, например, систему собственных функций следующей спектральной задачи:

$$LX(x)=\lambda X(x), x\in D, X|_\Gamma=0 \qquad (7)$$

при $\lambda=\lambda_k, k=1,2,...$, где оператор L определяется формулой:

$$LX=-a_0\Delta X+a(x)X. \qquad (8)$$

Известно, что задача (7) есть спектральная задача, изученная в четвертом параграфе второй главы работы $[5, стр. 109-110]$. Она имеет нетривиальные решения $u_k(x), k=1,2,...$ при $\lambda=\lambda_k, k=1,2,...$, образующих спектр задачи (7) и эти решения образуют базис в пространстве $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ и ради удобства предположим, что эти функции ортонормированы в $L_2(D)$:

$$(u_k,u_l)_{L_2(D)}=\int_D u_k(x)u_l(x)dx=\delta_k^l, k,l=1,2,... , \qquad (9)$$

где δ_k^l-символы Кронекера:

$$\delta_k^l = \begin{cases} 1, k=l \\ 0, k\neq l \end{cases}, \ k,l = 1,2,\dots \ .$$

Ясно, что эти функции $u_k = u_k(x), k = 1,2,\dots$ ортогональны и в следующем смысле:

$$[u_k, u_l] = L(u_k, u_l) = (u_k, u_l)_{W_2^1(D)} = \int\limits_D (a_0 \nabla u_k \nabla u_l + a(x) u_k u_l) dx = \lambda_k \delta_k^l, k,l = 1,2,\dots, \quad (10)$$

$$\{u_k, u_l\} = (Lu_k, Lu_l)_{L_2(D)} = (u_k, u_l)_{W_2^2(D)} = \lambda_k^2 \delta_k^l, k,l = 1,2,\dots, \quad (11)$$

где $\nabla -$ оператор набла. В силу предположения $a(x) \geq 0$ все собственные значения $\lambda_k, k = 1,2,\dots$ вещественны, положительны, расположены в порядке возрастания и $\lambda_k \to +\infty$ при $k \to \infty$. Наряду с этими предположим, что

$$\|u_k\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} \leq \tilde{d}_k, k = 1,2,\dots \ , \quad (12)$$

где $\tilde{d}_k, k = 1,2,\dots -$ положительные постоянные.

Приближенное решение прямой задачи (1), (2) будем искать в виде:

$$\psi^N(x,z) = \sum_{k=1}^N c_k^N(z) u_k(x) \ , \quad (13)$$

где $c_k^N(z) = (\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(D)}, k = \overline{1,N}$ определяются из условий:

$$i\frac{d}{dz}(\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(D)} - (L\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(D)} + (v_0(.,z)\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(D)} +$$

$$+ (iv_1(.,z)\psi^N(.,z), u_k)_{L_2(D)} + \left(ia_1|\psi^N(.,z)|^2 \psi^N(.,z), u_k\right)_{L_2(D)} = f_k(z), k = \overline{1,N}, \quad (14)$$

$$c_k^N(0) = (\psi^N(.,0), u_k)_{L_2(D)} = (\varphi^N, u_k)_{L_2(D)} = \varphi_k^N, k = \overline{1,N}. \quad (15)$$

Система (14) есть не что иное, как система N нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Из предположений (3)-(5) и из свойства функций $u_k(x), k = 1,2,\dots$ следует, что второе-пятое слагаемых левой части, а также правая часть системы (14) являются непрерывными на каждом множестве $\{z \in [0,L], |c_k^N| \leq const\}$ функции $z, c_k^N, k = \overline{1,N}$. Поэтому для существования по крайней мере одного решения задачи Коши (14), (15) на всем отрезке $[0,L]$ достаточно знать, что все ее возможные решения равномерно ограничены на $[0,L]$. Такая ограниченность следует из следующей леммы:

Лемма 1. Галеркинские приближения вида (13) удовлетворяют следующей оценке:

$$\sum_{k=1}^N |c_k^N(z)|^2 + \sum_{k=1}^N \left|\frac{dc_k^N(z)}{dz}\right|^2 \leq \|\psi^N(.,z)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \left\|\frac{\partial \psi^N(.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)} \leq$$

$$\leq c_1\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)} + (\tilde{c}_0)^3 \right) \quad (16)$$

для $\forall z \in [0, L]$, $c_1 > 0 -$ постоянная, не зависящая от N.

Доказательство леммы. Умножим каждое $k -$ ое уравнение системы (14) на свое $\bar{c}_k^N(z)$, полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$ и проинтегрируем по z от нуля до $z \le L$. В результате, используя формулу интегрирования по частям и условию $u_k\big|_\Gamma = 0, k = 1,2,\ldots$,имеем:

$$\int\limits_{\Omega_z}\left(i\frac{\partial \psi^N}{\partial z}\bar{\psi}^N - a_0\left|\nabla \psi^N\right|^2 - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v_0(x,\tau)\left|\psi^N\right|^2 + iv_1(x,\tau)\left|\psi^N\right|^2 + \right.$$

$$\left. + ia_1\left|\psi^N\right|^4 \right) dx d\tau = \int\limits_{\Omega_z} f\overline{\psi}^N dx d\tau \text{ , } \forall z \in [0, L].$$

Из этого равенства вычитывая его комплексное сопряжение и применяя неравенство Коши-Буняковского, нетрудно получить неравенство:

$$\left\|\psi^N(.,z)\right\|_{L_2(D)}^2 + 2a_1\int\limits_{\Omega_z}\left|\psi^N\right|^4 dx d\tau \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 + (2b_1+1)\int\limits_{\Omega_z}\left|\psi^N\right|^2 dx d\tau +$$

$$+\left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}^2, \ \forall z \in [0, L]. \tag{17}$$

Ясно, что имеет место неравенство:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(D)}^2 = \sum_{k=1}^N\left|c_k^N(0)\right|^2 = \sum_{k=1}^N\left|\varphi_k\right|^2 \le \sum_{k=1}^\infty\left|\varphi_k\right|^2 = \left\|\varphi\right\|_{L_2(D)}^2. \tag{18}$$

С учетом этого неравенства и леммы Гронуолла из неравенства (17) нетрудно получить справедливость оценки:

$$\left\|\psi^N(.,z)\right\|_{L_2(D)}^2 + 2a_1\int\limits_{\Omega_z}\left|\psi^N\right|^4 dx d\tau \le c_2\left(\left\|\varphi\right\|_{L_2(D)}^2 + \left\|f\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right), \forall z \in [0, L], \tag{19}$$

где $c_2 > 0 -$ постоянная, не зависящая от N.

Теперь оценим $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial z}$. С этой целью систему (14) напишем в виде:

$$i\frac{d}{dz}\left(\psi^N(.,z),u_k\right)_{L_2(D)} - \left(a_0\nabla\psi^N(.,z),\nabla u_k\right)_{L_2(D)} - \left(a(.)\psi^N(.,z),u_k\right)_{L_2(D)} +$$

$$+\left(v_0(.,z)\psi^N(.,z),u_k\right)_{L_2(D)} + +\left(iv_1(.,z)\psi^N(.,z),u_k\right)_{L_2(D)} +$$

$$+\left(ia_1\left|\psi^N(.,z)\right|^2\psi^N(.,z),u_k\right)_{L_2(D)} = f_k(z), k = \overline{1,N} \text{ .} \tag{20}$$

Вычислим первую производную обеих частей уравнений этой системы по z и каждое $k -$ ое уравнение полученной системы умножим на свое $\dfrac{d\bar{c}_k^N(z)}{dz}$. Тогда, полученные все равенства просуммируя по k от $k=1$ до $k=N$ и результат проинтегрируя по интервалу $(0,z)$, имеем:

$$\int_{\Omega_z}\left(i\frac{\partial^2\psi^N}{\partial z^2}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}-a_0\left|\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla\psi^N\right)\right|^2-a(x)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+v_0(x,\tau)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+\right.$$

$$+\frac{\partial v_0(x,\tau)}{\partial z}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+iv_1(x,\tau)\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+i\frac{\partial v_1(x,\tau)}{\partial z}\psi^N\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+$$

$$\left.+ia_1\frac{\partial}{\partial z}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}\right)dxd\tau=\int_{\Omega_z}\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}dxd\tau,\ \forall z\in[0,L].$$

Из этого равенства вычтем его комплексное сопряжение .Тогда из полученного равенства, с учетом формулы

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\left|\psi^N\right|^2\overline{\psi}^N\right)\frac{\partial\psi^N}{\partial z}=$$

$$=4\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2+\left(\psi^N\right)^2\left(\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial z}\right)^2+\left(\overline{\psi}^N\right)^2\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right)^2 \qquad (21)$$

и оценки (19), нетрудно установить справедливость неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)}+2a_1\int_{\Omega_z}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2dxd\tau\le\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)}+$$

$$+c_3\left(\|\varphi\|^2_{L_2(D)}+\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\right)+\left(2b_1+d_0+d_1+1\right)\int_{\Omega_z}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2dxd\tau,\forall z\in[0,L]. \qquad (22)$$

где $c_3>0-$постоянная, не зависящая от N. Теперь оценим первое слагаемое правой части этого неравенства. С этой целью каждое $k-$ое уравнение системы (14) при $z=0$ умножим на свое $\dfrac{d\overline{c}_k^N(0)}{dz}$ и все полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Тогда имеем:

$$i\int_D\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial z}\right|^2dx=\int_D\left(L\psi^N(x,0)-v_0(x,0)\psi^N(x,0)-iv_1(x,0)\psi^N(x,0)-\right.$$

$$\left.-ia_1\left|\psi^N(x,0)\right|^2\psi^N(x,0)+f(x,0)\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial z}dx.$$

Отсюда в силу неравенств:

$$\left\|v_m(.,z)\right\|^2_{L_\infty(D)}\le c_4\left(\left\|v_m\right\|^2_{L_2(0,L;L_\infty(D))}+\left\|\frac{\partial v_m}{\partial z}\right\|^2_{L_2(0,L;L_\infty(D))}\right),$$

$$\forall z\in[0,L],\ m=0,1 \qquad (23)$$

при $z=0$ и условий (4) получим справедливость неравенства:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)}\le 5\left\|L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)}+5(a_1)^2\left\|\psi^N(.,0)\right\|^6_{L_6(D)}+$$

$$+c_5\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)}+5\left\|f(.,0)\right\|^2_{L_2(D)}. \qquad (24)$$

При $n=2$ в силу известного неравенства (см. $[5]$, стр.78) имеем:

$$\left\|\psi^N(.,z)\right\|_{L_6(D)}\le\beta\left\|\nabla\psi^N(.,z)\right\|^{\frac{2}{3}}_{L_2(D)}\left\|\psi^N(.,z)\right\|^{\frac{1}{3}}_{L_2(D)},\forall z\in[0,L], \qquad (25)$$

где $\beta>0-$некоторая постоянная. Кроме того, справедливы неравенства:

$$\left\|f(.,z)\right\|^2_{L_2(D)}\le c_6\left(\left\|f\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial z}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right),\forall z\in[0,L], \qquad (26)$$

$$\left\|L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(D)}\le c_7\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}, \qquad (27)$$

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}\le c_8\left\|\varphi\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}. \qquad (28)$$

Используя неравенство (25) при $z=0$ и неравенства (26)-(28), из неравенства (24) получим следующую оценку:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)}\le c_9\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}\right), \qquad (29)$$

где $c_9>0-$постоянная, не зависящая от N. Если учесть эту оценку в правой части неравенства (22), то из полученного неравенства с применением леммы Гронуолла нетрудно установить справедливость оценки:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)}+2a_1\int_{\Omega_z}\left|\psi^N\right|^2\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2dxd\tau\le c_{10}\left(\left\|\varphi\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\left\|f\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\left\|\varphi\right\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}\right), \qquad (30)$$

для $\forall z\in[0,L]$, где $c_{10}>0-$постоянная не зависит от N.

Теперь оценим $\dfrac{\partial^2\psi^N}{\partial x_j\partial x_p}$, $j,p=1,2$. С этой целью каждое $k-$ое уравнение системы (14) умножим на свое $\lambda_k\bar{c}_k^N(z)$ и все полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Тогда имеем:

$$\int_D\left|L\psi^N(x,z)\right|^2dx=\int_D\left(i\frac{\partial\psi^N(x,z)}{\partial z}+v_0(x,z)\psi^N(x,z)+iv_1(x,z)\psi^N(x,z)+\right.$$

$$\left.+ia_1\left|\psi^N(x,z)\right|^2\psi^N(x,z)-f(x,z)\right)L\overline{\psi}^N(x,z)dx,\forall z\in[0,L].$$

Из этого равенства, с помощью неравенств (23), (26) и оценок (19), (30) получим справедливость неравенства:

$$\left\|L\psi^N(.,z)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{11}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(D)}\right) + 5(a_1)^2\left\|\psi^N(.,z)\right\|^6_{L_6(D)},$$
$$\forall z \in [0,L]. \qquad (31)$$

Оценим последнее слагаемое в правой части этого неравенства. С этой целью каждое $k-$ое уравнение системы (20) умножим на свое $\dfrac{d\bar{c}_k^N(z)}{dz}$ и все полученные равенства просуммируем по k от $k=1$ до $k=N$. Тогда, полученное равенство проинтегрируя по интервалу $(0,z)$, имеем:

$$\int_{\Omega_z}\Big(i\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\right|^2 - a_0\nabla\psi^N\frac{\partial}{\partial z}\left(\nabla\dot{\psi}^N\right) - a(x)\,\psi^N\frac{\partial\dot{\psi}^N}{\partial z} + v_0(x,\tau)\psi^N\frac{\partial\dot{\psi}^N}{\partial z} +$$
$$+ iv_1(x,\tau)\psi^N\frac{\partial\dot{\psi}^N}{\partial z} + ia_1\left(\left|\psi^N\right|^2\psi^N\right)\frac{\partial\dot{\psi}^N}{\partial z}\Big)dxd\tau = \int_{\Omega_z} f\,\frac{\partial\dot{\psi}^N}{\partial z}\,dxd\tau,\ \forall z\in[0,L]. \qquad (32)$$

Суммируя это равенство с его комплексным сопряжением и в полученном равенстве применяя неравенство Коши-Буняковского с использованием условий на коэффициенты уравнения и оценок (19), (30), а также неравенства (28), получим справедливость следующей оценки:

$$\left\|\nabla\psi^N(.,z)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{12}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(D)}\right),\ \forall z\in[0,L], \qquad (33)$$

где $c_{12} > 0-$постоянная, не зависящая от N. С помощью этой оценки и оценки (19) из неравенства (25) имеем:

$$\left\|\psi^N(.,z)\right\|^6_{L_6(D)} \le c_{13}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(D)}\right)^3,\ \forall z\in[0,L]. \qquad (34)$$

С учетом этой оценки и обозначения для $\widetilde{c}_0$ из неравенства (31) получим справедливость оценки:

$$\left\|L\psi^N(.,z)\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{14}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(D)} + (\widetilde{c}_0)^3\right),\ \forall z\in[0,L], \qquad (35)$$

где $c_{14} > 0-$постоянная, не зависящая от N.

Таким образом, в силу известного неравенства:

$$\left\|\psi^N(.,z)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} \le c_{15}\left\|L\psi^N(.,z)\right\|^2_{L_2(D)} + c_{16}\left\|\psi^N(.,z)\right\|^2_{L_2(D)},\ \forall z\in[0,L] \qquad (36)$$

из оценок (19), (30), (35) имеем:

$$\left\|\psi^N(.,z)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \left\|\frac{\partial\psi^N(.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)} \le c_{17}\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}^1_2(D)} + (\widetilde{c}_0)^3\right) \qquad (37)$$

для $\forall z\in[0,L]$, где $c_{17} > 0-$постоянная, не зависящая от N. Используя эту оценку и неравенство:

$$\sum_{k=1}^{N}\left|c_k^N(z)\right|^2+\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{dc_k^N(z)}{dz}\right|^2\leq\left\|\psi^N(.,z)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\left\|\frac{\partial\psi^N(.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)},$$

а также обозначение $c_1=c_{17}$, получим утверждение леммы. Лемма 1 доказана.

Теперь продолжим доказательство теоремы. Рассмотрим функции:

$$l_{N,k}(z)=\left(\psi^N(.,z),u_k\right)_{L_2(D)},N,k=1,2,... \; . \tag{38}$$

Из этого равенства и оценки (16), а также из ортонормированности функций $u_k(x),k=1,2,...$ следует справедливость неравенств:

$$\left|l_{N,k}(z)\right|\leq c_{18},\left|\frac{dl_{N,k}(z)}{dz}\right|\leq c_{19},\forall z\in[0,L],N,k=1,2,...,\tag{39}$$

где $c_{18}>0,c_{19}>0-$ постоянные, не зависящие от N,k. Используя систему (14), а также предположение (12), можем установить справедливость соотношений:

$$\left|l_{N,k}(z+\Delta z)-l_{N,k}(z)\right|\leq c_{20}\tilde{d}_k|\Delta z|\;,\tag{40}$$

$$\left|\frac{dl_{N,k}(z+\Delta z)}{dz}-\frac{dl_{N,k}(z)}{dz}\right|\leq c_{21}\tilde{d}_k|\Delta z|^{\frac{1}{2}}\tag{41}$$

для $\forall z\in[0,L],N,k=1,2,...$, где $c_{20}>0,c_{21}>0-$ постоянные не зависят от N и k. Следуя неравенствам (39)-(41) заключаем, что семейство функций $l_{N,k}(z),N,k=1,2,...$ и их производных $\frac{dl_{N,k}(z)}{dz},N,k=1,2,...$ равномерно ограничены на отрезке $[0,L]$ и равностепенно непрерывны при фиксированном k и при произвольном $N\geq k$ на этом отрезке. Тогда можем выбрать подпоследовательность $N_m,m=1,2,...$ по которой функции $l_{N_m,k}(z),m=1,2,...$ и их производные $\frac{dl_{N_m,k}(z)}{dz},m=1,2,...$ сходятся равномерно на отрезке $[0,L]$ к непрерывным функциям $l_k(z)$ и $\frac{dl_k(z)}{dz}$, соответственно, для каждого $k=1,2,...$. Функции $l_k(z),k=1,2,...$ и их производные определяют функции:

$$\psi(x,z)=\sum_{k=1}^{\infty}l_k(z)u_k(x),\tag{42}$$

$$\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{dl_k(z)}{dz}u_k(x)\;.\tag{43}$$

Действуя аналогично, как и в работах $[6,7]$, доказываем, что подпоследовательности $\{\psi^{N_m}(x,z)\},\left\{\frac{\partial\psi^{N_m}(x,z)}{\partial z}\right\}$ сходятся слабо в $\overset{0}{W}{}_2^2(D)$ и $L_2(D)$ к функциям $\psi(x,z),\frac{\partial\psi(x,z)}{\partial z}$, соответственно, равномерно относительно $z\in[0,L]$.

Нетрудно установить, что $\{\psi^{N_m}(x,z)\}$ принадлежит пространству B_0. Тогда можем утверждать, что предельная функция $\psi(x,z)$, определенная формулой (42), также принадлежит пространству B_0 и для этой функции справедлива оценка:

$$\|\psi(.,z)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\left\|\frac{\partial\psi(.,z)}{\partial z}\right\|^2_{L_2(D)}\le c_1\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(D)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(D)}+(\tilde{c}_0)^3\right),\forall z\in[0,L], \quad (44)$$

которая следует непосредственно из оценки (16) с переходом к нижнему пределу по подпоследовательности $N=N_m, m=1,2,...$. Из этой же оценки следует оценка (6). Далее действуя, как и в работе $[7]$, доказываем, что предельная функция $\psi(x,z)$ из B_0 является решением начально-краевой задачи (1), (2).

Теперь докажем единственность решения начально-краевой задачи (1), (2). Пусть $\psi(x,z)$, $\Phi(x,z)$ - любые два решения начально-краевой задачи (1), (2). Обозначим $w(x,z)=\psi(x,z)-\Phi(x,z)$. Тогда ясно, что функция $w(x,z)$ будет решением следующей начально-краевой задачи:

$$i\frac{\partial w}{\partial z}+a_0\Delta w-a(x)w+v_0(x,z)w+iv_1(x,z)w=ia_1(|\Phi|^2\Phi-|\psi|^2\psi),(x,z)\in\Omega, \quad (45)$$

$$w(x,0)=0,x\in D,\ w|_S=0. \quad (46)$$

Умножим обе части уравнения (45) на функцию $\overline{w}(x,z)$ и полученное равенство проинтегрируем по области Ω_z.Тогда, используя формулу интегрирования по частям и равенство:

$$|\Phi|^2\Phi-|\psi|^2\psi=(|\Phi|^2+|\psi|^2)w+\Phi\psi\overline{w},$$

получим справедливость равенства:

$$\int_{\Omega_z}\left(i\frac{\partial w}{\partial z}\overline{w}-a_0|\nabla w|^2-a(x)|w|^2+v_0(x,\tau)|w|^2+iv_1(x,\tau)|w|^2\right)dxd\tau=$$
$$=-ia_1\int_{\Omega_z}\left[(|\Phi(x,\tau)|^2+|\psi(x,\tau)|^2)|w(x,\tau)|^2+\Phi(x,\tau)\psi(x,\tau)(\overline{w}(x,\tau))^2\right]dxd\tau,$$
$$\forall z\in[0,L]$$

Вычитывая из этого равенства его комплексное сопряжение, получим следующее равенство:

$$\|w(.,z)\|^2_{L_2(D)}+2a_1\int_{\Omega_z}(|\Phi(x,\tau)|^2+|\psi(x,\tau)|^2)|w(x,\tau)|^2dxd\tau=-2\int_{\Omega_z}v_1(x,\tau)|w(x,\tau)|^2dxd\tau-$$
$$-2a_1\int_{\Omega_z}\operatorname{Im}\left(\Phi(x,\tau)\psi(x,\tau)(\overline{w}(x,\tau))^2\right)dxd\tau,\ \forall z\in[0,L].$$

Из этого равенства нетрудно получить справедливость неравенства:

$$\left\|w(.,z)\right\|^2_{L_2(D)} + a_1 \int\limits_{\Omega_z} \left(\left|\Phi(x,\tau)\right|^2 + \left|\psi(x,\tau)\right|^2\right)\left|w(x,\tau)\right|^2 dx d\tau \le 2b_1 \int\limits_0^z \left\|w(.,\tau)\right\|^2_{L_2(D)} d\tau ,$$

$\forall z \in [0,L]$.

Используя условие $a_1 > 0$ и лемму Гронуолла получим соотношение:

$$\left\|w(.,z)\right\|_{L_2(D)} = 0 ,\ \forall z \in [0,L].$$

Отсюда получим $w(x,z) = \psi(x,z) - \Phi(x,z) = 0 \quad \forall \overset{0}{x} \in D$, $\forall z \in [0,L]$. Следовательно, решение начально-краевой задачи (1), (2) единственное. Теорема 1 доказана.

3. Существование и единственность решения второй начально-краевой задачи

Теперь изучим вопрос разрешимости второй начально-краевой задачи для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики.

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу об определении функции $\psi = \psi(x,z)$ из условий:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial z} + a_0 \Delta \psi - a(x)\psi + v_0(x,z)\psi + iv_1(x,z)\psi + ia_1|\psi|^2 \psi = f(x,z), (x,z) \in \Omega, \quad (47)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), x \in D, \qquad \left.\frac{\partial \psi}{\partial \nu}\right|_S = 0 , \quad (48)$$

где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ - оператор Лапласа, $\psi = \psi(x,z)$ – волновая функция или комплексная амплитуда электрического поля волны, распространяющиеся вдоль оси z , $a_0 > 0, a_1 > 0$ – заданные числа, $a(x)$ - заданная вещественнозначная измеримая ограниченная функция, удовлетворяющая условию:

$$0 < \mu_1 \le a(x) \le \mu_0, \forall \overset{0}{x} \in D, \mu_0, \mu_1 = const > 0 , \quad (49)$$

функции $v_0(x,z)$, $v_1(x,z)$ удовлетворяют условиям (4), а функции $\varphi(x)$, $f(x,z)$ – заданные комплекснозначные измеримые функции, удовлетворяющие условиям:

$$\varphi \in W_2^2(D), \quad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|_\Gamma = 0 \ , f \in W_2^{0,1}(\Omega), \quad (50)$$

ν - внешняя нормаль к границе Γ области D.

Ясно, что задача об определении функции $\psi = \psi(x,z)$ из условий (47), (48) является второй начально-краевой задачей для нелинейного стационарного уравнения квазиоптики. Под решением этой задачи будем понимать функцию $\psi = \psi(x,z)$ из пространства $B_1 \equiv C^0([0,L], W_2^2(D)) \cap C^1([0,L], L_2(D))$, удовлетворяющую уравнению (1) для любого $z \in [0, L]$ и почти всех $x \in D$, а условиям (2) для почти всех $x \in D$ и $(\xi, z) \in S$, соответственно.

Теорема 2. Пусть функции $v_0(x,z), v_1(x,z), a(x), \varphi(x), f(x,z)$ удовлетворяют условиям (4), (49), (50),соответственно. Тогда начально-краевая задача (47), (48) имеет единственное решение из пространства B_1 и для этого решения справедлива оценка:

$$\|\psi(.,z)\|_{W_2^2(D)} + \left\|\frac{\partial \psi(.,z)}{\partial z}\right\|_{L_2(D)} \le c_{22}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(D)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^3_{W_2^1(D)} + \left(\tilde{c}_{22}\right)^{\frac{3}{2}}\right) \quad (51)$$

для $\forall z \in [0, L]$, где $c_{22} > 0-$ некоторая постоянная, а $\tilde{c}_{22}$ определяется формулой:

$$\tilde{c}_{22} = \|\varphi\|^2_{W_2^2(D)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \|\varphi\|^6_{W_2^1(D)}.$$

Доказательство этой теоремы также проводится методом Галеркина вполне аналогично доказательству теоремы 1. При этом в качестве фундаментальной системы в пространстве $W_2^2(D)$ выбирается система собственных функций $u_k = u_k(x), k = 1,2,...$ следующей спектральной задачи:

$$LX(x) = \lambda X(x), x \in D, \left.\frac{\partial X}{\partial \nu}\right|_{\Gamma} = 0, \quad (52)$$

где оператор L определяется формулой (8).

Замечание. Выше полученные результаты могут быть установлены в случае, когда область D принадлежит R^3.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов М.А., Шмальгаузен В.И. Принципы адаптивной оптики. М.: Наука, 1985, 336 с.
2. Ягубов Г.Я. Оптимальное управление коэффициентом квазилинейного уравнения Шредингера // Докторск. дисс. Баку, 1993, 318 с.; Автореферат докторск. дисс. Киев, 1994, 29 с.
3. Ягубов Г.Я., Мусаева М.А. О вариационном методе решения многомерной обратной задачи для нелинейного нестационарного уравнения Шредингера // Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.- техн.- матем. наук, 1994, т. 15, № 5-6, с. 56-61.
4. Mahmudov N.M. Solvability of boundary value problems for a Schrodinger equation with pura imaginary coefficient in the nlinear part of this equation // Proc. of IMM of NAS of Azerb., 2007, v. 27, p. 25-37.
5. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973, 408 с.
6. Искендеров А.Д. Определение потенциала в нестационарном уравнении Шредингера // В сб.: «Проблемы матем. моделирования и опт.управления». Баку: 2001, с. 6-36.
7. Искендеров А.Д., Ягубов Г.Я. Оптимальное управление неограниченным потенциалом в многомерном нелинейном и нестационарном уравнении Шредингера // Вестник Ленкоранского государственного университета, серия естественных наук. Ленкорань: 2007, с. 3-56.

QEYRİ-XƏTTİ HİSSƏSİNDƏ XƏYALİ ƏMSAL OLAN KVAZİOPTİKANIN ÇOXÖLÇÜLÜ QEYRİ-XƏTTİ STASİONAR TƏNLİYİ ÜÇÜN BAŞLANĞIC-SƏRHƏD MƏSƏLƏLƏRİNİN HƏLLOLUNANLIĞI

N.S.İBRAHİMOV

XÜLASƏ

Bu işdə qeyri-xətti hissəsində xəyali əmsal olan kvazioptikanın çoxölçülü qeyri-xətti stasionar tənliyi üçün başlanğıc-sərhəd məsələlərinə baxılmışdır. Baxılan məsələlərin qoyuluşunun korrektliyi öyrənilmiş və həllin varlığı və yeganəliyi teoremleri isbatlanmışdır.

SOLVABILITY OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR MULTIDIMENSIONAL NONLINEAR STATIONARY EQUATION OF QUASIOPTIC WITH PURE IMAGINARY COEFFICIENT IN THE NONLINEAR PART

N.S.IBRAHIMOV

SUMMARY

The article deals with the initial-boundary value problems for nonlinear equation of quasioptic with pure imaginary coefficient in the nonlinear part of this equation. The correctness problem for the statement of the considered boundary value problems is investigated and the existence and uniqueness theorems for its solution are proved.